UEBER

GEOMETRISCHE NIVELLEMENTS

UND DEREN

AUSGLEICHUNG

NACH DER METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE.

VON

DR. MEISSNER.

BERLIN, 1872.

FRANZ DUNCKER'S BUCHDRUCKEREI.

UEBER

GEOMETRISCHE NIVELLEMENTS

UND DEREN

AUSGLEICHUNG

NACH DER METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE.

VON

DR. MEISSNER.

BERLIN, 1872.

FRANZ DUNCKER'S BUCHDRUCKEREI.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553622_0272

Die Höhenbestimmung zweier Punkte geschieht entweder auf geometrischem oder trigonometrischem Wege.

Die erstere Art besteht in Folgendem:

Man stellt ein Nivellir-Fernrohr, das Behufs Herstellung einer horizontalen Absehungslinie mit einer Libelle zusammenhängt, in der Mitte zweier mit Maasseintheilung versehenen Latten auf und visirt nach den Latten, von denen die eine auf dem Anfangspunkt des Nivellements aufgestellt ist. Die Differenz der beiden Ablesungen giebt den Höhen-Unterschied der beiden Latten-Aufstellungspunkte.

Setzt man diese Manipulation fort, wobei man, wenn etwaiges steiles Terrain nicht kürzere Stationen verlangt, die Aufstellung des Nivellir-Fernrohrs gewöhnlich 200 Schritt auseinanderlegt, so erhält man ein Nivellement, das bei einer genügenden Anzahl von Fixpunkten den ganzen Höhenzug wiedergiebt und überaus einfach in seiner Ausführung ist.

Durch die Aufstellung des Nivellements-Instruments in der Mitte der beiden Lattenstationen fällt der völlig unberechenbare Einfluss der Strahlenberechnung fort und nur die Fehler des Ablesens bleiben übrig.

Da der Höhen-Unterschied zweier Fixpunkte stets durch viele Höhen-Unterschiede von Zwischenstationen ermittelt wird, so heben sich die unvermeidlichen kleinen Ablesungsfehler zum grossen Theil heraus und der wahrscheinliche Fehler des geometrischen Nivellements ist daher nicht einfach der Entfernung, sondern dem Quadrat der Entfernung proportional.

Das trigonometrische Nivellement unterscheidet sich von dem ersteren dadurch, dass man nicht im Horizont visirt, sondern Höhenwinkel, Zenithdistancen, misst und durch die grössere Länge seiner Stationen.

Da sich der Einfluss der Strahlenbrechung jeder Berechnung entzieht und nicht allein von der Dichtigkeit und dem Feuchtigkeitsgehalt der Luft, sondern auch von der Temperatur abhängt und dadurch bedeutend veränderlich wird, so muss man beim trigonometrischen Höhenbestimmen diesen Einfluss der terrestrischen Refraction als auf beiden Endpunkten der Stationen gleich annehmen und um dieser Annahme möglichst nahe zu kommen, werden die Beobachtungen auf beiden Endpunkten gleichzeitig ausgeführt und wählt man dazu diejenige Tageszeit, in welcher die der Erde zunächst befindliche Luftschicht als gleichmässig erwärmt angenommen werden kann, also unter regelmässigen Witterungsverhältnissen die Zeit von 11 bis 3 Uhr.

Nach dieser Voraussetzung der gleichen Refraction an beiden Endpunkten der Nivellements-Linie beschreibt alsdann der Lichtstrahl in der Vertikal-Ebene einen Kreisbogen und es ergiebt sich für die Berechnung des Höhen-Unterschiedes die Formel

$$\text{Höh.-Unt.} = S.\ \text{tg.}\frac{Z' - Z}{2}$$

wo S die horizontale Entfernung der beiden Nivellements-Endpunkte, Z' und Z die auf den beiden Endpunkten vom Zenith gemessenen Winkel bedeuten.

Die Annahme der gleichen Refraction ist aber eine sehr willkürliche und bei längeren Entfernungen der Stationen von einander gradezu unmögliche; denn wenn es bei kurzen Entfernungen auch öfter zutreffen mag, dass der Lichtstrahl auf dem Wege von der einen zur anderen Station sich in gleich dichter Luftart erhält, wie dies z. B. bei gleicher

Bodenbeschaffenheit möglich sein kann, so ist dies bei längeren Linien gewiss nur als eine grosse Seltenheit anzunehmen.

Der Höhen-Unterschied zweier Fixpunkte wird beim trigonometrischen Nivellement stets nur durch ein und dieselbe Winkelmessung gefunden, ein Herausheben des Fehlers findet nicht Statt, sodass der wahrscheinliche Fehler jeder einzelnen Höhenmessung also einfach der Entfernung proportional wird und der wahrscheinliche Fehler des ganzen Nivellements-Netzes wie die Quadrat-Wurzel aus der Entfernung wächst.

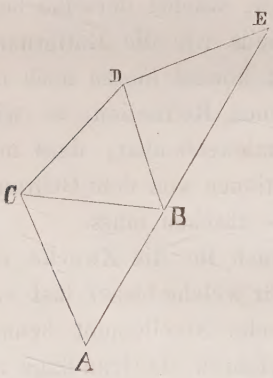
Während daher beim geometrischen Nivelliren der wahrscheinliche Fehler der ganzen Strecke der Quadrat-Wurzel aus der Entfernung proportional ist, wächst derselbe beim trigonometrischen Höhenmessen theils wie die Entfernung, theils wie das Quadrat derselben; kommt hierzu noch der Einfluss der unsicheren terrestrischen Refraction, so wird dieser Fehler so gross resp. so unberechenbar, dass man bei grösseren Entfernungen der Stationen von dem Gebrauch des trigonometrischen Nivellements absehen muss.

Es empfiehlt sich vielmehr auch für die Zwecke von Grad- und Landesvermessungen, für welche bisher fast ausschliesslich nur das trigonometrische Nivellement benutzt worden war, das geometrische Verfahren als Grundlage anzuwenden und nur für Neben-Nivellements, besonders bei ungangbarem Terrain mittelst kurzer Stationen bis zu 1 Meile von dem trigonometrischen Nivellement Gebrauch zu machen.

Diese Ansicht, welche auch von der Geodäten-Conferenz der europäischen Gradmessung ausgesprochen worden ist, hat mich veranlasst, im Nachstehenden diejenigen Rechnungen auszuführen, die bei Ausgleichungen von geometrischen Nivellementsfiguren nach Analogie der bei Aus-

gleichung von Horizontal- und Vertikal-Dreiecksnetzen angewandten Methode der kleinsten Quadrate in Betracht kommen.

Nachdem die ganze Nivellements-Strecke, um die unvermeidlichen kleinen Beobachtungsfehler auf ein Minimum zu reduciren, doppelt nivellirt worden ist, stellen die arithmetischen Mittel der zwischen den einzelnen Fixpunkten gemessenen Höhen-Unterschiede die wahrscheinlichsten Werthe dar und es bleibt noch der in der geschlossenen Figur übrig bleibende Fehler auszugleichen, d. h. diesen Fehler nach mathematischen Gesetzen auf die einzelnen Höhen-Unterschiede der Figur zu vertheilen.



Es sei A der als Nullpunkt angenommene Fixpunkt des Nivellements-Netzes und B, C, D die übrigen Fixpunkte darin; gemessen sind die Höhen-Unterschiede zwischen

I.

A und $B = a + (1)$
A und $C = b + (2)$
B und $C = c + (3)$ u. s. w.

wobei a, b und c die wirklich gemessenen Höhen-Unterschiede und (1), (2) und (3) die unbekannten gesuchten Verbesserungen derselben bedeuten.

Die in diesem Netz aufzustellende Bedingung ist die, dass, wenn man von A als Nullpunkt ausgehend die gemessene Nivellements-Linie verfolgend zu A zurückgekehrt ist, man ebensoviel gestiegen als wieder herabgegangen ist, d. h. dass die Summe der sämmtlichen Höhen-Unterschiede zwischen den Umfangspunkten in einer geschlossenen Figur $= O$ sein muss.

Diese Bedingung führt zu folgenden Gleichungen:

II.

$$O = \mathfrak{a}_1 (a + [1]) + \mathfrak{a}_2 (b + [2]) + \mathfrak{a}_3 (c + [3]) + \ldots$$
$$O = \mathfrak{b}_1 (a + [1]) + \mathfrak{b}_2 (b + [2]) + \mathfrak{b}_3 (c + [3]) + \ldots$$
$$O = \mathfrak{c}_1 (a + [1]) + \mathfrak{c}_2 (b + [2]) + \mathfrak{c}_3 (c + [3]) + \ldots$$

in denen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3 \ldots \mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3 \ldots \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \mathfrak{c}_3$ Null oder + 1 oder — 1 sind, je nachdem der Höhen-Unterschied, auf den sie sich beziehen, in der Gleichung $= O$ ist oder aber als Elevation + 1 oder als Depression — 1 vorkommt.

Lösen wir in diesen Gleichungen die Klammern auf und setzen für a, b, c die absoluten Werthe ein, wobei $\mathfrak{a}_1 a$, $\mathfrak{a}_2 b$, $\mathfrak{a}_3 c = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{b}_1 a$, $\mathfrak{b}_2 b$, $\mathfrak{b}_3 c = \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{c}_1 a$, $\mathfrak{c}_2 b$, $\mathfrak{c}_3 c = \mathfrak{C}$ angenommen ist, so erhalten die Bedingungsgleichungen die endgültige Form.

III.

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a}_1 (1) + \mathfrak{a}_2 (2) + \mathfrak{a}_3 (3) + \ldots \ldots$$
$$\mathfrak{B} = \mathfrak{b}_1 (1) + \mathfrak{b}_2 (3) + \mathfrak{b}_3 (3) + \ldots \ldots$$
$$\mathfrak{C} = \mathfrak{c}_1 (1) + \mathfrak{c}_2 (3) + \mathfrak{c}_3 (3) + \ldots \ldots$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit den vorläufig beliebigen neuen Unbekannten I, II, III, so erhält man:

IV.

$$\mathfrak{A}\ \mathrm{I} = \mathfrak{a}_1 (1)\ \mathrm{I} + \mathfrak{a}_2 (2)\ \mathrm{I} + \mathfrak{a}_3 (3)\ \mathrm{I} + \ldots$$
$$\mathfrak{B}\ \mathrm{II} = \mathfrak{b}_1 (1)\ \mathrm{II} + \mathfrak{b}_2 (2)\ \mathrm{II} + \mathfrak{b}_3 (3)\ \mathrm{II} + \ldots$$
$$\mathfrak{C}\ \mathrm{III} = \mathfrak{c}_1 (1)\ \mathrm{III} + \mathfrak{c}_2 (2)\ \mathrm{III} + \mathfrak{c}_3 (3)\ \mathrm{III} + \ldots$$

Die gewöhnliche Differentation dieser Gleichungen successive nach den Variabeln (1) (2) und (3) ergiebt:

V.

$$O = \mathfrak{a}_1\ \mathrm{I} \quad O = \mathfrak{a}_2\ \mathrm{I} \quad O = \mathfrak{a}_3\ \mathrm{I}$$
$$O = \mathfrak{b}_1\ \mathrm{II} \quad O = \mathfrak{b}_2\ \mathrm{II} \quad O = \mathfrak{b}_3\ \mathrm{II}$$
$$O = \mathfrak{c}_1\ \mathrm{III} \quad O = \mathfrak{c}_2\ \mathrm{III} \quad O = \mathfrak{c}_3\ \mathrm{III}, \text{ oder}$$

Va.

$$O = \mathfrak{a}_1\ \mathrm{I} + \mathfrak{b}_1\ \mathrm{II} + \mathfrak{c}_1\ \mathrm{III} + \ldots$$
$$O = \mathfrak{a}_2\ \mathrm{I} + \mathfrak{b}_2\ \mathrm{II} + \mathfrak{c}_2\ \mathrm{III} + \ldots$$
$$O = \mathfrak{a}_3\ \mathrm{I} + \mathfrak{b}_3\ \mathrm{II} + \mathfrak{c}_3\ \mathrm{III} + \ldots$$

Behufs Ausgleichung des Nivellements-Systems, d. h. für die Bestimmung der unbekannten Verbesserungen (1), (2) und (3) ist ausser den Bedingungsgleichungen ad III nach der Forderung, dass die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler ein Kleinstes ist, Genüge zu leisten; nennt man die Gewichte der gemessenen Höhen-Unterschiede a, b, c, p_{I}, p_{II} und p_{III}, so wird dieser Forderung durch die Formel

$\varphi\ \text{x} = \text{p}_{\text{I}}\ (1)^2 + p_{\text{II}}\ (2)^2 + p_{\text{III}}\ (3)^2 + \ldots =$ Minimum entsprochen.

Durch Differentation erhält man, da das 1. Differential $= O$ werden muss

$$\text{d}\ \varphi\ \text{x} = 2\ p_{\text{I}}\ (1) + 2\ p_{\text{II}}\ (2) + 2\ p_{\text{III}}\ (3) + \ldots$$
$$O = p_{\text{I}}\ (1) + p_{\text{II}}\ (2) + p_{\text{III}}\ (3) + \ldots$$

und da auch die partiellen Differentialen nach den einzelnen Variabeln (1), (2) und (3) $= O$ sind

VI.

$$O = p_{\text{I}}\ (1)\quad O = p_{\text{II}}\ (2)\quad O = p_{\text{III}}\ (3)$$

Die Combination dieser Gleichungen mit den Gleichungen Va ergiebt:

VII.

$$O = p_{\text{I}}\ (1) - \mathfrak{a}_1\ \text{I} - \mathfrak{b}_1\ \text{II} - \mathfrak{c}_1\ \text{III} - \ldots$$
$$O = p_{\text{II}}\ (2) - \mathfrak{a}_2\ \text{I} - \mathfrak{b}_2\ \text{II} - \mathfrak{c}_2\ \text{III} - \ldots$$
$$O = p_{\text{III}}\ (3) - \mathfrak{a}_3\ \text{I} - \mathfrak{b}_3\ \text{II} - \mathfrak{c}_3\ \text{III} - \ldots$$

und aus diesen Gleichungen findet man:

VIII.

$$(1) = \frac{1}{p_{\text{I}}}\ (\mathfrak{a}_1\ \text{I} + \mathfrak{b}_1\ \text{II} + \mathfrak{c}_1\ \text{III} + \ldots)$$
$$(2) = \frac{1}{p_{\text{II}}}\ (\mathfrak{a}_2\ \text{I} + \mathfrak{b}_2\ \text{II} + \mathfrak{c}_2\ \text{III} + \ldots)$$
$$(3) = \frac{1}{p_{\text{III}}}\ (\mathfrak{a}_3\ \text{I} + \mathfrak{b}_3\ \text{II} + \mathfrak{c}_3\ \text{III} + \ldots)$$

Setzt man diese Werthe in die Bedingungs-Gleichungen III ein, so erhält man die

Endgleichungen von folgender Form:

IX.

$$\mathfrak{A} = (\mathrm{I.I})\ \mathrm{I} + (\mathrm{I.II})\ \mathrm{II} + (\mathrm{I.III})\ \mathrm{III} + \ldots$$
$$\mathfrak{B} = (\mathrm{I.II})\ \mathrm{I} + (\mathrm{II.II})\ \mathrm{II} + (\mathrm{II.III})\ \mathrm{III} + \ldots$$
$$\mathfrak{C} = (\mathrm{I.III})\ \mathrm{I} + (\mathrm{II.III})\ \mathrm{II} + (\mathrm{III.III})\ \mathrm{III} + \ldots$$

In diesen Gleichungen ist:

$$(\mathrm{I.\ I.}) = \frac{\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_1}{p_1} + \frac{\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_2}{p_{11}} + \frac{\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{a}_3}{p_{111}} + \ldots$$
$$(\mathrm{II.\ II.}) = \frac{\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_1}{p_1} + \frac{\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{b}_2}{p_{11}} + \frac{\mathfrak{b}_3\,\mathfrak{b}_3}{p_{111}} + \ldots$$
$$(\mathrm{III.\ III.}) = \frac{\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{c}_1}{p_1} + \frac{\mathfrak{c}_2\,\mathfrak{c}_2}{p_{11}} + \frac{\mathfrak{c}_3\,\mathfrak{c}_3}{p_{111}} + \ldots \text{ u. s. w.}$$
$$(\mathrm{I.\ II.}) = \frac{\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1}{p_1} + \frac{\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_2}{p_{11}} + \frac{\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{b}_3}{p_{111}} + \ldots$$
$$(\mathrm{I.\ III.}) = \frac{\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{c}_1}{p_1} + \frac{\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{c}_2}{p_{11}} + \frac{\mathfrak{a}_3\,\mathfrak{c}_3}{p_{111}} + \ldots \text{ u. s. w.}$$
$$(\mathrm{II.\ III.}) = \frac{\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1}{p_1} + \frac{\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{c}_2}{p_{11}} + \frac{\mathfrak{b}_3\,\mathfrak{c}_3}{p_{111}} + \ldots$$

Die Auflösung dieser Endgleichungen geschieht in folgender Art:

Es seien die aufzulösenden Gleichungen IX. ohne Rücksicht auf die Vorzeichen:

IXa.

$$\mathfrak{A} = \mathrm{I.\ I.}\ x + \mathrm{I.\ II.}\ y + \mathrm{I.\ III.}\ z$$
$$\mathfrak{B} = \mathrm{I.\ II.}\ x + \mathrm{II.\ II.}\ y + \mathrm{II.\ III.}\ z$$
$$\mathfrak{C} = \mathrm{I.\ III.}\ x + \mathrm{II.\ III.}\ y + \mathrm{III.\ III.}\ z$$

wo für die Factoren I., II. und III. in den Gleichungen IX. der Reihe nach x, y, z gesetzt ist.

Multiplicirt man die erste Gleichung successive mit den Quotienten $\frac{\mathrm{I.\ II.}}{\mathrm{I.\ I.}}$ und $\frac{\mathrm{I.\ III.}}{\mathrm{I.\ I.}}$ und zieht diese beiden neuen Gleichungen der Reihe nach von der 2. und 3. Gleichung in IXa. ab, so fällt x heraus und man erhält

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\frac{\text{I.II}}{\text{I.I}} = (\text{II.II} - \text{I.II}\ \frac{\text{I.II}}{\text{I.I}})\,y + (\text{II.III} - \text{I.III}\frac{\text{I.II}}{\text{I.I}})\ z$$

$$\mathfrak{C} - \mathfrak{A}\frac{\text{I.III}}{\text{I.I}} = (\text{II.III} - \text{I.II}\frac{\text{I.III}}{\text{I.I}})\,y + (\text{III.III} - \text{I.III}\frac{\text{I.III}}{\text{I.I}})\ z$$

Nennt man $\mathfrak{B} - \mathfrak{A}\ \frac{\text{I.II}}{\text{I.I}} = \mathfrak{B}.1$

$\text{II.II} - \text{I.II}\ \frac{\text{I.II}}{\text{I.I}} = \text{II.II}.1$

$\text{II.III} - \text{I.III}\ \frac{\text{I.II}}{\text{I.I}} = \text{II.III}.1$ u.s.w.

so erhält man:

IXb.

$$\mathfrak{B}.1 = \text{II.II}.1\ y + \text{II.III}.1\ z$$

$$\mathfrak{C}.1 = \text{II.III}.1\ y + \text{III.III}.1\ z$$

Multiplicirt man, wie vorhin, wiederum die erste Gleichung mit dem Quotienten $\frac{\text{II.III.1}}{\text{II.II.1}}$ und zieht die dadurch erhaltene Gleichung von der $\mathfrak{C}.1$ Gleichung in IXb ab, so findet man

$$\mathfrak{C}.1 - \mathfrak{B}.1\frac{\text{II.III.1}}{\text{II.II.1}} = (\text{III.III.1} - \text{II.III.1}\frac{\text{II.III.1}}{\text{II.II.1}})\ z$$

Nennt man

$\mathfrak{C}.1 - \mathfrak{B}.1\ \frac{\text{II.III.1}}{\text{II.II.1}} = \mathfrak{C}.2$

$\text{III.III.1} - \text{II.III.1}\ \frac{\text{II.III.1}}{\text{II.II.1}} = \text{III.III.2}$, so ist

IXc.

$$\mathfrak{C}.2 = \text{III.III}.2\ z$$

$$z = \frac{\mathfrak{C}.2}{\text{III.III}.2}$$

Aus den Gleichungen IXb und IXa erhält man dann:

$$y = \frac{\mathfrak{B}.1}{\text{II.II}.1} - \frac{\text{II.III}.1}{\text{II.II}.1}\cdot z \text{ und}$$

$$w = \frac{\mathfrak{A}}{\text{I.I}} - \frac{\text{I.II}}{\text{I.I}}\cdot y - \frac{\text{I.III}}{\text{I.I}}\cdot z$$

Substituirt man die für x, y und z gefundenen Werthe, die die Factoren I, II, III repräsentiren, in die Gleichung VIII, so findet man die gesuchten Verbesserungen der gemessenen Höhen-Unterschiede (1) (2) (3).

Anmerkung. Wenn man bei den Endgleichungen IX berücksichtigt, dass alle a, b, c entweder Null oder $\pm$ 1 sind, wie schon bei der Gleichung II gesagt worden war, und dass mithin auch alle Quadrate und Producte Null oder $\pm$ 1 werden, so hat man für die Bildung der Coefficienten das Gesetz, dass:
(I . I), (II . II) . . ., d. h. die Coefficienten der quadratischen Glieder der Gleichungen in jeder einzelnen Gleichung die Summe der Gewichte der in der Gleichung vorkommenden Höhen-Unterschiede darstellen und dass:
(I . II) (I . III) . . . d. h. die Coefficienten des Factors II, III u. s. w. in der ersten Gleichung, die Summe der Gewichte aller derjenigen Höhen-Unterschiede darstellen, die zugleich in der 1. und 2., respective in der 1. und 3. Gleichung auftreten.

Bestimmung des Gewichts und des mittleren Fehlers einer Funktion gemessener Höhen-Unterschiede.

Das Gewicht P einer grösseren Nivellements-Strecke besteht aus $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots$, d. h. aus der Summe der Gewichte der Bestimmungen der Höhen-Unterschiede der einzelnen Fixpunkte, welche 1 Kilometer von einander entfernt angenommen werden sollen.

Es ist also $\frac{1}{P} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots$ und durch die Gleichung

$$\frac{1}{P} = \frac{n}{p}$$

wird P ausgedrückt, wenn n die Anzahl der Fixpunkte bedeutet.

Hieraus folgt, dass das Gewicht einer Nivellements-Strecke der Entfernung umgekehrt proportional ist.

Der mittlere Fehler einer Nivellements-Strecke ergiebt sich durch die Formel

$$\varepsilon\varepsilon = \frac{(\nu\nu)}{m-n}$$

wo $(\nu\nu)$ die Summe aller Fehlerquadrate, m die Anzahl der unbekannten Grössen bedeutet; sind also durch die doppelte Messung 300 Messungen vorhanden, die 150 Höhen-Unterschiede ergeben, so ist der mittlere Fehler der ganzen Strecke

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{(\nu\nu)}{300-150}} \qquad \sqrt{\frac{(\nu\nu)}{150}}$$

Bezeichnet daher ε den mittleren Fehler eines Kilometers, so folgt der mittlere Fehler der ganzen Strecke aus der Formel Quadrat des mittleren Fehlers $= \varepsilon\varepsilon\, L$, wo L die Länge des ganzen Nivellements in Kilometern ist.

Hat man die Nivellementsstrecke die beiden Mal mit denselben Instrumenten und unter denselben Umständen gemessen, was immer der Fall sein wird, so liegt kein Grund vor, das eine Nivellement für besser als das andere zu halten, sie sind vielmehr von gleicher Güte, es gebührt ihnen also auch dasselbe ε und die Quadrate der mittleren Fehler sind der Reihe nach

$$\varepsilon\varepsilon\, L_1 \quad \varepsilon\varepsilon\, L_2 \quad \varepsilon\varepsilon\, L_3 \text{ u. s. w.}$$

Die Gewichte p_1 p_{11} p_{111} resp.

$$\frac{1}{L_1} \quad \frac{1}{L_2} \quad \frac{1}{L_3}$$

Zur Bestimmung des Gewichts und des mittleren Fehlers vor der Ausgleichung des Nivellementsnetzes sei U eine lineare Funktion der gemessenen Höhen-Unterschiede a, b, c ...

$$U = U_0 + m_1\, a + m_2\, b + m_3\, c + \ldots$$

so ist, da alle Höhen-Unterschiede von einander unabhängige Grössen sind, das Quadrat des mittleren Fehlers in U

$$= m_1^2\, \varepsilon\varepsilon\, L_1 + m_2^2\, \varepsilon\varepsilon\, L_2 + m_3^2\, \varepsilon\varepsilon\, L_3 + \ldots$$

$$= \varepsilon\varepsilon\, (m_1^2\, L_1 + m_2^2\, L_2 + m_3^2\, L_3 + \ldots)$$

und das Gewicht dieser Bestimmung

$$P = \frac{1}{Q},\ mo\ Q =$$

X.

$$= m_1^2\, L_1 + m_2^2\, L_2 + m_3^2\, L_3 + \ldots$$

$$= \frac{m_1^2}{p_1} + \frac{m_2^2}{p_{11}} + \frac{m_3^2}{p_{111}} + \ldots$$

Um das Gewicht einer Bestimmung nach der Ausgleichung zu erhalten, sei U eine Funktion der **ausgeglichenen** Höhen-Unterschiede

$$a + (1),\ b + (2),\ c + (3) - \ldots,\ \text{also}$$

$$U = F\,[a + (1)] + [b + (2)] + [c + (3)] + \ldots$$

Es kommt zunächst darauf an, die Verbesserungen (1) (2) (3) aus der Ausgleichung in Funktion von a, b, c zu finden und zu substituiren, um U so in $\varphi\ (a, b, c)$ zu verwandeln, für deren Gewicht $P = \frac{1}{Q}$ war.

$$U = F\,(a, b, c) + l_1\,(1) + l_2\,(2) + l_3\,(3) + \ldots$$

Da (1) (2) (3) als kleine Zuschüsse, Variable, von a, b, c zu betrachten sind, so findet man durch Differentation

$$\frac{d.F}{d.a} = l_1 \quad \frac{d.F}{d.b} = l_2 \quad \frac{d.F}{d.c} = l_3 \ldots$$

Multiplicirt man nun die Gleichungen VIII der Reihe nach mit l_1, l_2, l_3 und addirt sie, so erhält man

XI.

$$l_1\,(1) + l_2\,(2) + l_3\,(3) + \ldots \quad \left(\frac{l_1\,\mathfrak{a}_1}{p_1} + \frac{l_2\,\mathfrak{a}_2}{p_{11}} + \frac{l_3\,\mathfrak{a}_3}{p_{111}}\right) \text{I}$$

$$+ \left(\frac{l_1 \mathfrak{b}_1}{p_1} + \frac{l_2 \mathfrak{b}_2}{p_{11}} + \frac{l_3 \mathfrak{b}_3}{p_{111}}\right) \text{II} + \left(\frac{l_1 \mathfrak{c}_1}{p_1} + \frac{l_2 \mathfrak{c}_2}{p_{11}} + \frac{l_3 \mathfrak{c}_3}{p_{111}}\right) \text{III}$$

oder kürzer

$$l_1\,(1) + l_2\,(2) l_3\,(3) + \ldots = (\text{I}\,N)\,\text{I} + (\text{II}\,N)\,\text{II} + (\text{III}\,N)\,\text{III} + \ldots$$

Wenn man hierauf die Endgleichungen IX nochmals auflöst, nachdem man ihre linken Seiten mit (I N) (II N) (III N) ... vertauscht hat, und bezeichnet die Werthe der Factoren für diesen Fall mit (I) (II) (III), d. h. giebt man den Gleichungen die folgende Form:

$$\begin{aligned}
(\text{I}\,N) &= (\text{I}.\text{I})\ (\text{I}) + (\text{I}.\text{II})\ (\text{II}) + (\text{I}.\text{III})\ (\text{III}) + \ldots \\
(\text{II}\,N) &= (\text{I}.\text{II})\ (\text{I}) + (\text{II}.\text{II})\ (\text{II}) + (\text{II}.\text{III})\ (\text{III}) + \ldots \\
(\text{III}\,N) &= (\text{I}.\text{III})\ (\text{I}) + (\text{II}.\text{III})\ (\text{II}) + (\text{III}.\text{III})\ (\text{III}) + \ldots
\end{aligned}$$

oder kürzer nach der bei den Endgleichungen IX entwickelten Methode

XII.

$$\begin{aligned}
(\text{I}\,N) &= (\text{I}.\text{I})\ (\text{I}) + (\text{I}.\text{II})\ (\text{II}) + (\text{I}.\text{III})\ (\text{III}) + \ldots \\
(\text{II}\,N) &= (\text{II}.\text{II})\ (\text{II}) + (\text{II}.\text{III})\ (\text{III}) + \ldots \\
(\text{III}\,N) &= (\text{III}.\text{III})\ (\text{III}) + \ldots
\end{aligned}$$

so ergiebt sich nach Addition dieser Gleichungen und nachdem man sie der Reihe nach mit I, II, III multiplicirt hat, wegen der Gleichungen IX aus Gleichung XI

XIII.

$$l_1\,(1) + l_2\,(2) + l_3\,(3) + \ldots = \mathfrak{A}\,(\text{I}) + \mathfrak{B}\,(\text{II}) + \mathfrak{C}\,(\text{III}) + \ldots$$

und

$$U = F(a, b, c) + \mathfrak{A}\,(\text{I}) + \mathfrak{B}\,(\text{II}) + \mathfrak{C}\,(\text{III}).$$

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ lassen sich durch die Gleichungen II und III als Funktion von a, b, c ... darstellen, denn wenn man die Gleichung III von der Gleichung II subtrahirt, ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= -\mathfrak{a}_1\,a - \mathfrak{a}_2\,b - \mathfrak{a}_3\,c - \ldots \\
\mathfrak{B} &= -\mathfrak{b}_1\,a - \mathfrak{b}_2\,b - \mathfrak{b}_3\,c - \ldots \\
\mathfrak{C} &= -\mathfrak{c}_1\,a - \mathfrak{c}_2\,b - \mathfrak{c}_3\,c - \ldots
\end{aligned}$$

d. h. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ... sind die Fehler der Umfänge geschlossener Figuren mit umgekehrten Vorzeichen.

Die Funktion U ist nach Gleichung XIII nunmehr $\varphi(a, b, c \ldots)$ mit dem Gewicht

$$P = \frac{1}{Q}$$

Q war aber nach Gleichung X =

$$\frac{m_1^2}{p_1} + \frac{m_2^2}{p_{11}} + \frac{m_3^2}{p_{111}} + \ldots = \left(\frac{m^2}{p}\right) \quad wo$$

$$m_1 = \frac{d\,U}{d\,a} \quad m_2 = \frac{d\,U}{d\,b} \quad m_3 = \frac{d\,U}{d\,c}$$

Durch Differentation erhält man

$$m_1 = \frac{d\,U}{d\,a} = \frac{d\,F}{d\,a} + \frac{d\,\mathfrak{A}(\mathrm{I})}{d\,a} + \frac{d\,\mathfrak{B}(\mathrm{II})}{d\,a} + \frac{d\,\mathfrak{C}(\mathrm{III})}{d\,a} + \ldots$$

folglich:

$$m_1 = l_1 - \mathfrak{a}_1\,(\mathrm{I}) - \mathfrak{b}_1\,(\mathrm{II}) - \mathfrak{c}_1\,(\mathrm{III}) \text{ und auch}$$
$$m_2 = l_2 - \mathfrak{a}_2\,(\mathrm{I}) - \mathfrak{b}_2\,(\mathrm{II}) - \mathfrak{c}_2\,(\mathrm{III})$$
$$m_3 = l_3 - \mathfrak{a}_3\,(\mathrm{I}) - \mathfrak{b}_3\,(\mathrm{II}) - \mathfrak{c}_3\,(\mathrm{III}).$$

Führt man die Bildung von Q aus, so erhält man

$$Q = \frac{l_1^2}{p_1} + \frac{l_2^2}{p_{11}} + \frac{l_3^2}{p_{111}} + \ldots$$

$$-2 \quad [(\mathrm{I}\,N)\ (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}\,N)\ (\mathrm{II}) + (\mathrm{III}\,N)\ (\mathrm{III}) + \ldots]$$
$$+ (\mathrm{I}) \quad [(\mathrm{I}.\mathrm{I})\ (\mathrm{I}) + (\mathrm{I}.\mathrm{II})\ (\mathrm{II}) + (\mathrm{I}.\mathrm{III})\ (\mathrm{III}) + \ldots]$$
$$+ (\mathrm{II}) \quad [(\mathrm{I}.\mathrm{II})\ (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}.\mathrm{II})\ (\mathrm{II}) + (\mathrm{II}.\mathrm{III})\ (\mathrm{III}) + \ldots]$$
$$+ (\mathrm{III}) \quad [(\mathrm{I}.\mathrm{III})\ (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}.\mathrm{III})\ (\mathrm{II}) + (\mathrm{III}.\mathrm{III})\ (\mathrm{III}) + \ldots]$$

Die eckigen Klammern der 3 letzten Zeilen sind in Folge der Gleichungen XII der Reihe nach $(\mathrm{I}\,N)$, $(\mathrm{II}\,N)$, $(\mathrm{III}\,N)$, substituirt man dies, so heben diese letzten Zeilen die Hälfte der zweiten Zeile auf und es bleibt

$$Q = \left(\frac{l^2}{p}\right) - (\mathrm{I}\,N)\,(\mathrm{I}) - (\mathrm{II}\,N)\,(\mathrm{II}) - (\mathrm{III}\,N)\,(\mathrm{III}) - \ldots$$

Um die zur Bildung von Q nöthigen Factoren aus der

Auflösung der Endgleichungen direct entnehmen zu können und nicht nach absolvirter Ausgleichung des Nivellements-Netzes nach der oben gegebenen Formel erst mühsam berechnen zu müssen, empfiehlt es sich, die Gleichung für Q auf die folgende Form zu bringen.

Ordnet man die Funktion

XIV.

$$\begin{aligned} F = x \{ &(\mathrm{I\,I})\ x + (\mathrm{I\,II})\ y + (\mathrm{I\,III})\ z + \ldots \} \\ + y \{ &(\mathrm{I\,II})\ x + (\mathrm{II\,II})\ y + (\mathrm{II\,III})\ z + \ldots \} \\ + z \{ &(\mathrm{I\,III})\ x + (\mathrm{II\,III})\ y + (\mathrm{III\,III})\ z + \ldots \} \end{aligned}$$

in welcher

$$\begin{aligned} (\mathrm{I\,I})\ x + (\mathrm{I\,II})\ y + (\mathrm{I\,III})\ z + \ldots &= (\mathrm{I}\,N) \\ (\mathrm{I\,II})\ x + (\mathrm{II\,II})\ y + (\mathrm{II\,III})\ z + \ldots &= (\mathrm{II}\,N) \\ (\mathrm{I\,III})\ x + (\mathrm{II\,III})\ y + (\mathrm{III\,III})\ z + \ldots &= (\mathrm{III}\,N) \end{aligned}$$

nach den Potenzen von x, so findet man

$$\begin{aligned} F = &(\mathrm{I\,I})x^2 + (\mathrm{I\,II})yx + (\mathrm{I\,III})zx \\ &+ (\mathrm{I\,II})yx + (\mathrm{II\,II})y^2 + (\mathrm{II\,III})yz \\ &+ (\mathrm{I\,III})zx + (\mathrm{II\,III})yz + (\mathrm{III\,III})z^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= (T)\ x^2 + 2\,R\,x + S \\ &= \frac{(T\,x + R)^2}{T} + S - \frac{R^2}{T} \end{aligned}$$

Es ist ferner

$$T x + R = (\mathrm{I\ I})\ x + (\mathrm{I\ II})\,y + (\mathrm{I\ III})\ z + \ldots = (\mathrm{I}\,N)$$

$$\begin{aligned} F = &\frac{(\mathrm{I}\,N)^2}{(\mathrm{I\ I})} + (\mathrm{II\,II})yy + (\mathrm{III\,III})zz + \ldots \\ &+ 2(\mathrm{II\,III})yz + \ldots \\ &- \frac{(\mathrm{I\,II})\ (\mathrm{I\,II})}{(\mathrm{I\ I})}\ yy - 2\,\frac{(\mathrm{I\,II})\ (\mathrm{I\,III})}{(\mathrm{I\ I})}\ yz - \ldots \\ &- \frac{(\mathrm{I\,III})\ (\mathrm{I\,III})}{(\mathrm{I\ I})}\ zz \end{aligned}$$

oder nach der bei der Auflösung der Endgleichungen IX in IXa, b, c umständlich entwickelten Bezeichnungsweise

$$F = \frac{(\mathrm{I}\,N)^2}{(\mathrm{I}\,\mathrm{I})} + y\,\{(\mathrm{II}\;\mathrm{II}\,.\,1)\,y + (\mathrm{II}\;\mathrm{III}\,.\,1)\,z + \ldots\}$$
$$+ z\,\{(\mathrm{II}\,\mathrm{III}\,.\,1)\,y + (\mathrm{III}\,\mathrm{III}\,.\,1)\,z + \ldots\}$$

Führt man die Umformung, wie sie für x hier gezeigt, weiter fort, so wird

$$F = \frac{(\mathrm{I}\,N)^2}{(\mathrm{I}\,\mathrm{I})} + \frac{(\mathrm{II}\,N\,.\,1)^2}{(\mathrm{II}\,\mathrm{II}\,.\,1)} + \frac{(\mathrm{III}\,N\,.\,2)^2}{(\mathrm{III}\,\mathrm{III}\,.\,2)} + \ldots$$

und das Gewicht $P = \frac{1}{Q}$ wird

$$\frac{1}{(\frac{l^2}{p}) - \frac{(\mathrm{I}\,N)^2}{(\mathrm{I}\,\mathrm{I})} - \frac{(\mathrm{II}\,N\,.\,1)^2}{(\mathrm{II}\,\mathrm{II}\,.\,1)} - \frac{(\mathrm{III}\,N\,.\,2)^2}{(\mathrm{III}\,\mathrm{III}\,.\,2)} - \ldots}$$

Will man mit Hülfe dieses neuen P den mittleren Fehler der betreffenden Funktion der ausgeglichenen Höhen-Unterschiede finden, so leuchtet ein, dass das Quadrat des mittleren Fehlers nicht mehr, wie vor der Ausgleichung $\varepsilon\varepsilon$ ist, sondern in einen anderen Werth $\varepsilon\varepsilon^1$ übergegangen ist.

$\varepsilon\varepsilon^1$ ist indess aus $\varepsilon\varepsilon$ leicht zu finden, wenn man die Summe der übrig bleibenden Fehlerquadrate, die zur Bildung von $\varepsilon\varepsilon$ benutzt worden waren, um den Theil vergrössert, der durch die Ausgleichung hinzukommt und der mit (V. V.) bezeichnet werden soll.

Um ihn zu finden, muss man auf die Bildung des mittleren Fehlerquadrats zurückgehen. Wenn auf einem Kilometer die beiden Höhen-Unterschiede h und h^1 gefunden, so ist der Höhen-Unterschied im Mittel $H = \frac{h + h^1}{2}$ genommen worden. Die beiden Abweichungen vom Mittel oder die Fehler $H - h$ und $H - h^1$ werden dann dem absoluten Werthe nach gleich und nur dem Vorzeichen nach entgegengesetzt sein, also $+\nu$ und $-\nu$.

Hat nun die ganze Linie, in welcher jener Kilometer liegt, auf die Länge von L_1 Kilometern an ihrem Höhen-

Unterschied a durch die Ausgleichung die Verbesserung (1) erhalten, so muss der Höhen-Unterschied H jenes Kilometers eine Verbesserung von $\frac{(1)}{L_1}$ erhalten und die Fehler der beiden Messungen sind nun

$$+ \nu + \frac{(1)}{L_1} \text{ und } - \nu + \frac{(1)}{L_1}$$

die Summe der Quadrate dieser beiden Fehler ist

$$2\ \nu^2 + 2\ \frac{(1)^2}{L_1^2}$$

Auf der ganzen Strecke von L_1 Kilometern hat man demnach

$$\text{Summe der Fehlerquadrate} = 2\ \left\{ (\nu^2) + \frac{(1)^2}{L_1} \right\}$$

$$= 2\ \left\{ (\nu^2) + p_1\ (1)^2 \right\}$$

und für eine einmalige Messung $= (\nu^2) + p_1\ (1)^2$

Dieselben Fehlerquadrate erhält man auf jeder andern in der Ausgleichung befindlichen Strecke, so dass im ganzen Netz die Summe der Fehlerquadrate gewachsen ist um

$$p_1\ (1)^2 + p_{11}\ (2)^2 + p_{111}\ (3)^2 + \ldots = (\mathfrak{B}\ \mathfrak{B}).$$

Bildet man diese Summe nach den Gleichungen VIII und berücksichtigt dabei die Bedeutung der Coëfficienten der Gleichung IX, so erhält man

$$(\mathfrak{B} . \mathfrak{B}) = \mathfrak{A} . \mathrm{I} + \mathfrak{B}\ \mathrm{II} + \mathfrak{C}\ \mathrm{III} + \ldots$$

oder nach der in XIV entwickelten Umwandlungs-Formel

$$(\mathfrak{B} . \mathfrak{B}) = \frac{(\mathfrak{A})^2}{(\mathrm{I}\ \mathrm{I})} + \frac{(\mathfrak{B} . 1)^2}{(\mathrm{II}\ \mathrm{II} . 1)} + \frac{(\mathfrak{C} . 2)^2}{(\mathrm{III} . \mathrm{III} . 2)} + \ldots$$

Die Gesammtlänge der nivellirten Strecken in dem ausgeglichenen Nivellements-Netz sei

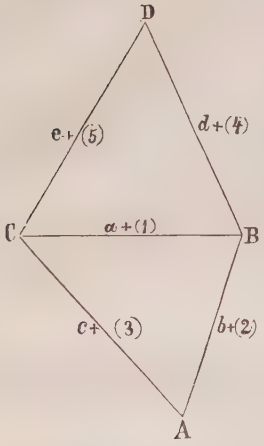
$$L_1 + L_2 + L_3 + \ldots = (L)$$

so ist nach der Ausgleichung das Quadrat des mittleren Fehlers auf 1 Kilometer

$$\varepsilon\varepsilon^1 = \varepsilon\varepsilon + \frac{(\mathfrak{V}\,\mathfrak{V})}{(L)}$$

und der mittlere Fehler der Funktion U

$$= \frac{\varepsilon^1}{\sqrt{P}}, \text{ mo } P = \frac{1}{Q}.$$



Beispiel.

Zwischen den Punkten A, B, C, D seien die nachfolgenden Höhen-Unterschiede gemessen:

			Entfernung in Kilometern.	Gewicht.	
Von B bis C	$a + (1) = +\ 15{,}277 + (1)$		15	p_1	$= 1/15$
„ A „ B	$b + (2) = -\ 8{,}801 + (2)$		8	p_{11}	$= 1/8$
„ C „ A	$c + (3) = -\ 6{,}450 + (3)$		12	p_{111}	$= 1/12$
„ D „ B	$d + (4) = +\ 9{,}444 + (4)$		16	p_{1111}	$= 1/16$
„ C „ D	$e + (5) = -\ 24{,}707 + (5)$		14	p_{11111}	$= 1/14$

Bedingungs-Gleichungen (Gleichungen III).

I . $O = +\ 0{,}026 + (1) + (2) + (3)$

II . $O = +\ 0{,}014 + (1) + (4) + (3)$.

Verbesserungen (Gleichungen VIII).

$(1) = 15\ \{\ \text{I} + \text{II}\ \}$

$(2) = 8\ .\ \text{I}$

$(3) = 12\ .\ \text{I}$

$(4) = 16\ .\ \text{II}$

$(5) = 14\ .\ \text{II}$

Endgleichungen (Gleichungen IX).

$$-0{,}026 = +35\,\mathrm{I} + 15\,\mathrm{II}$$
$$-0{,}014 = \quad\quad + 45\,\mathrm{II}.$$

Die Auflösung der Endgleichungen ergiebt die Werthe für die Factoren

$$\mathrm{I} = -0{,}000711 \quad \mathrm{II} = -0{,}00074$$

und ausserdem findet man

$$(\mathfrak{V}\,.\,\mathfrak{V}) = \frac{(0{,}026)^2}{35} + \frac{(0{,}00286)^2}{38{,}5714} + 0{,}00001952.$$

Aus den Factoren ergeben sich die Verbesserungen

$$(1) = -0{,}012$$
$$(2) = -0{,}006$$
$$(3) = -0{,}008$$
$$(4) = -0{,}001$$
$$(5) = -0{,}001$$

und nach deren Anbringung sind die Höhen-Unterschiede

$$a + (1) = +15{,}265$$
$$b + (2) = -8{,}807$$
$$c + (3) = -6{,}458$$
$$d + (4) = +9{,}443$$
$$e + (5) = -24{,}708.$$

Berechnung des Gewichts der Bestimmung des Höhen-Unterschieds von B gegen A.

1) Wenn die Bestimmung durch Nivellement der directen Verbindung zwischen A und B geschehen ist, so ist der Höhen-Unterschied

$$U = b + (2)$$
$$l_1 = 0,\ l_2 = +1,\ l_3 = l_4 \ldots = 0$$

$$\frac{l_2^2}{p_{11}} = 8;\ \text{alle übrigen } \frac{l}{p} = 0,\quad l_2^2 = 8{,}000$$

$l_2\ (2) = 8\ .\ \mathrm{I}$

folglich: $(\mathrm{I}\ N) = +\ 8\ .\ (\mathrm{II}\ N) = 0$

$$\frac{(\mathrm{I}\ N)^2}{(\mathrm{I}\ \mathrm{I})} = 1{,}829$$

$$\frac{(\mathrm{II}\ N\ .\ 1)^2}{(\mathrm{II}\ \mathrm{II}\ .\ 1)} = \frac{3{,}429}{5{,}258} \qquad \begin{array}{r} -\ 5{,}258 \\ \hline Q = 2{,}742 \end{array}$$

$$P = \frac{1}{2{,}742}$$

2) Wenn die Bestimmung von B durch Nivellement von A über C nach B geschehen ist: so ist

$U = -\ a\ -\ c\ -\ (1)\ -\ (3)$

$l_1 = -\ 1,\ l_2 = 0,\ l_3 = -\ 1,\ l_4 = l_5 = 0$

$$\frac{l_1^2}{p_1} = 15,\ \frac{l_3^2}{p_{111}} = 12 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left(\frac{l^2}{p}\right) = 27{,}000$$

$$l_1\ (1) + l_3\ (3) = -\ 27\ \mathrm{I} - 15\ \mathrm{II}$$

folglich

$$(\mathrm{I}\ N) = -\ 27 \quad (\mathrm{II}\ N) = -\ 15$$

$$\frac{(\mathrm{I}\ N)^2}{(\mathrm{I}\ \mathrm{I})} = 20{,}829$$

$$\frac{(\mathrm{II}\ N\ .\ 1)^2}{(\mathrm{II}\ \mathrm{II}\ .\ 1)} = \frac{3{,}429}{24{,}258} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{array}{r} 24{,}258 \\ \hline Q = 2{,}742 \end{array}$$

$$P = \frac{1}{2{,}742}.$$

Berechnung des mittleren Fehlers der Bestimmung des Höhen-Unterschiedes von B gegen A.

Nehmen wir den mittleren Fehler des unausgeglichenen Nivellements auf 1 Kilometer

$$\varepsilon = 0{,}0019 \text{ Meter}$$

gefunden an, dann wird

$$\varepsilon^1\varepsilon^1 = 0{,}00000361 + \frac{(\mathfrak{V} \,.\, \mathfrak{V})}{(L)}$$

$$= 0{,}00000361 + \frac{0{,}00001952}{65}$$

$$= 0{,}0000003003$$

$$\varepsilon^1 = \pm\, 0{,}000548$$

und der mittlere Fehler der Bestimmung von B gegen A ist

$$\frac{\pm\, \varepsilon^1}{\sqrt{P}} = \pm\, 0{,}000548\ \sqrt{2{,}742}$$

$$= \pm\, 0{,}000907 \text{ Meter.}$$

Berlin, im November 1871.